

## ПРО ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕЯКИХ КОПУЛ

**Ю. І. ВОЛКОВ**

Розглянуто приклади ряду двомірних копул; даються алгоритми для побудови розподілів з цими копулами; вводиться поняття середньої лінійної модульної регресії й знайдено відповідні прямі для розглядуваних копул.

We consider a row of two-dimensional copulas, algorithms are given for the construction of distributions with these copulas, the concept of middle linear module regression is entered and corresponding lines are found for examined copulas.

### 1. Приклади копул та їх генераторів

*Двомірною копулою сукупності випадкових величин називається функція розподілу цих величин і така, що її маргінальні розподіли є рівномірними на проміжку  $[0,1]$ .*

Копулам і їх застосуванням приділяється багато уваги, див., наприклад, [1,2].

В роботі вказується ряд сукупностей випадкових величин розподілами яких будуть відомі копули.

Загальна схема, якою користуються для знаходження розподілу заданої сукупності така. Нехай сукупність  $(\xi, \eta)$  рівномірно розподілена в одиничному квадраті  $[0,1] \times [0,1]$ . Розглянемо сукупність випадкових величин  $(U, V)$ :  $U = \xi$ ,  $V = h(\xi, \eta)$  і таку, що відображення  $u=x$ ,  $v=h(x, y)$  взаємно однозначне, отже, можна виразити  $x$  і  $y$  через  $u$  та  $v$ . Нехай  $y=y(u, v)$ . Тоді функція розподілу сукупності  $(U, V)$  буде такою:  $C(u, v) = \int_0^u y(t, v) dt$ , а звідси

$$\text{знаходимо щільність } c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial y(u, v)}{\partial v}.$$

Навпаки, якщо задано копулу  $C(x, y)$ , то для генерування сукупності випадкових величин  $(\xi, \eta)$  з такою копулою потрібно спочатку знайти функцію розподілу величини  $\eta$  за умови  $\xi=x$ , використовуючи співвідношення  $F_{\eta|\xi=x} = \int_0^y c(x, t) dt$ , де  $c(x, t) = \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x \partial t}$  щільність копули. Потім з рівняння  $F_{\eta|\xi=x}(x, y) = z$  знаходимо  $y = y(x, z)$  і тоді функцією розподілу сукупності  $(\xi, \eta = y(\xi, \zeta))$ , де випадкові величини  $\xi$  та  $\zeta$  рівномірно розподілені на проміжку  $[0,1]$ , буде копула  $C(x, y)$ . На практиці для отримання значень величин  $\xi$  та  $\zeta$  використовується який-небудь генератор випадкових чисел.

### Приклад 1.1. Функцією розподілу сукупності

$$(\xi, 2\eta \left( 1 - \alpha(2\xi - 1) + \sqrt{(1 - \alpha(2\xi - 1))^2 + 4\alpha\eta(2\xi - 1)} \right)^{-1}), \quad -1 < \alpha < 1,$$

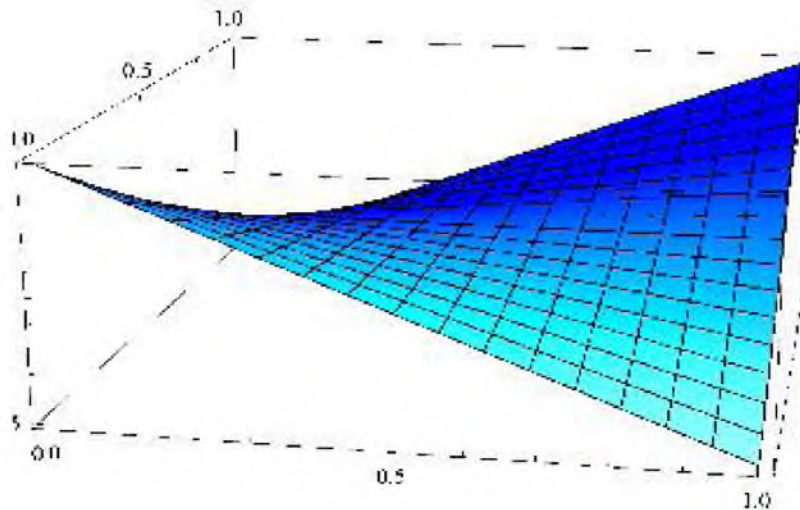
буде копула Моргенштерна (Morgenstern, s)

$$C(u, v) = uv(1 + \alpha(1 - u)(1 - v)), \quad c(u, v) = 1 + \alpha(1 - 2u)(1 - 2v). \quad (1)$$

Справді, розв'язуємо рівняння

$$2y \left( 1 - \alpha(2u - 1) + \sqrt{(1 - \alpha(2u - 1))^2 + 4\alpha y(2u - 1)} \right)^{-1} = v \quad \text{відносно } y.$$

Матимемо  $y(u, v) = \alpha v(1 - v)(1 - 2u) + v$ . Звідси отримаємо (1).



Графік щільності копули Моргенштерна ( $\alpha=0.5$ )

**Приклад 1.2.** Функцією розподілу сукупності

$$\left( \xi, 1 - \left( 1 - \frac{\xi(\xi - 2)\eta^2 + \sqrt{\xi^2(\xi - 2)^2\eta^4 + 4\eta^2(1 - \xi)^2}}{2(1 - \xi)^2} \right)^{1/2} \right)$$

буде копула Джоя (Joi,s)  $C(u, v) = 1 - \sqrt{1 - uv(u - 2)(v - 2)}$ ,

$$c(u, v) = \frac{(1 - u)(1 - v)(uv(2 - u)(2 - v) - 2))}{(1 - uv(2 - u)(2 - v))^{3/2}} \quad (2)$$

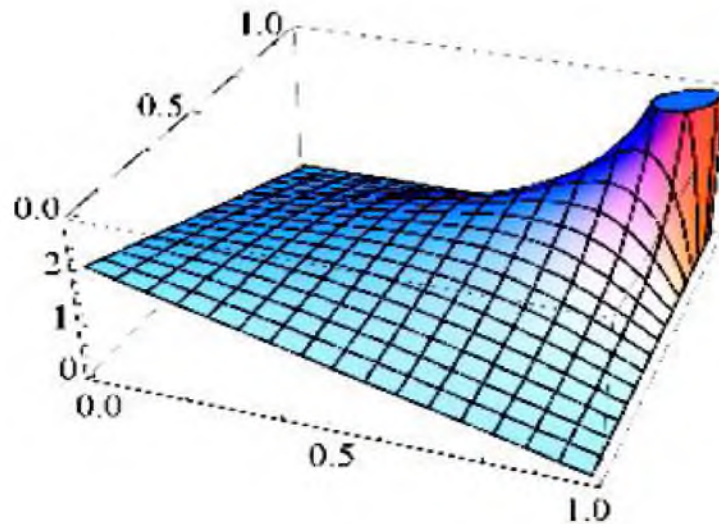
Справді, розв'язуємо рівняння

$$1 - \left( 1 - \frac{u(u - 2)y^2 + \sqrt{u^2(u - 2)^2y^4 + 4y^2(1 - u)^2}}{2(1 - u)^2} \right)^{1/2} = v$$

відносно  $y$ . Матимемо

$$y(u, v) = \frac{v(1 - u)(2 - v)}{\sqrt{1 - uv(2 - u)(2 - v)}}.$$

Звідси отримаємо (2).



Графік щільності копули Джоя

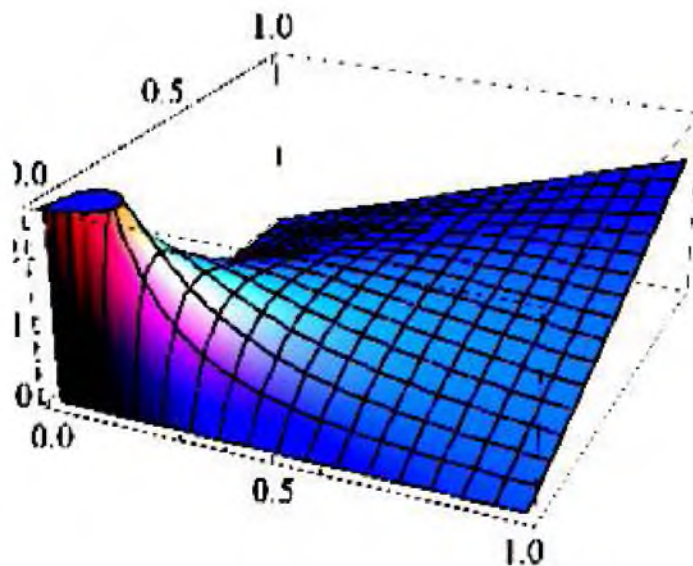
**Приклад 1.3.** Функцією розподілу сукупності  $\left(\xi, \frac{\xi\sqrt{\eta}}{1-(1-\xi)\sqrt{\eta}}\right)$  буде

$$\text{копула Клайтона (Clayton, } s) \quad C(u, v) = \frac{uv}{u + v - uv}, \quad c(u, v) = \frac{2uv}{(u + v - uv)^3}. \quad (3)$$

Справді, розв'язуємо рівняння  $\left(\frac{u\sqrt{y}}{1-(1-u)\sqrt{y}} = v\right)$  відносно  $y$ .

Матимемо

$$y(u, v) = \frac{v^2}{(u + v - uv)^2}. \text{ Звідси отримаємо (3).}$$



Графік щільності копули Клайтона

**Приклад 1.4.** Функцією розподілу сукупності

$$\left( \xi, 1 - \exp\left( \frac{1}{\theta} - \frac{W_{-1}(\xi)}{\theta \log(1 - \xi) - 1} \right) \right), \quad 0 < \theta < 1, \xi = e^{-1/\theta} (1 - \eta)(\log(1 - \xi) - 1/\theta)$$

( $W_{-1}$ - функція Ламберта) є копула Гамбеля (Humbel,s)

$$C_{\theta}(u, v) = u + v - 1 + (1 - u)(1 - v) \exp(-\theta \log(1 - u) \log(1 - v)). \quad (4)$$

Доведення. Розв'язуємо рівняння

$$1 - \exp\left( \frac{1}{\theta} - \frac{W_{-1}(e^{-1/\theta} (1 - u)(1 - y)(\log(1 - u) - 1/\theta))}{\theta \log(1 - u) - 1} \right) = v \quad \text{відносно } y.$$

Матимемо

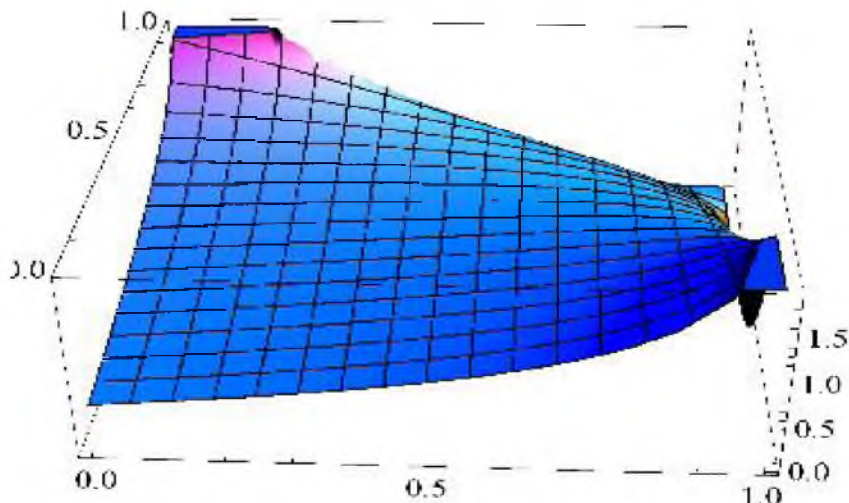
$$W_{-1}(e^{-1/\theta} (1 - u)(1 - y)(\log(1 - u) - 1/\theta)) = (\theta \log(1 - u) - 1)(1/\theta - \log(1 - v)).$$

Звідси

$$y(u, v) = 1 + (\theta \log(1 - v) - 1)(1 - v)(1 - u)^{-\theta \log(1 - v)}, \text{ а тому}$$

$$C(u, v) = \int_0^u y(t, v) dt = u + v - 1 + (1 - u)(1 - v)(1 - u)^{-\theta \log(1 - v)} =$$

$$u + v - 1 + (1 - u)(1 - v) \exp(-\theta \log(1 - u) \log(1 - v)).$$



Графік щільності копули Гамбеля ( $\theta=0.5$ )

**Приклад 1.5.** Функцією розподілу сукупності

$$\left( \xi; \frac{2\eta(\eta-1)(\xi(\alpha^2-1)-\alpha+1)-\alpha-(2\eta-1)\sqrt{\alpha^2+4(\alpha^2-1)\alpha\xi\eta(1-\xi)(1-\eta)}}{2(\eta(\eta-1)^2(\alpha-1)^2-\alpha)} \right), \alpha > 0,$$

буде копула Плакетта (Plackett, s)

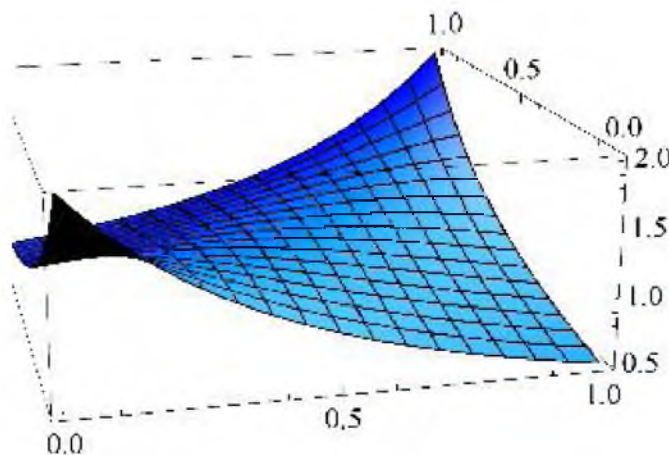
$$C(u, v) = \frac{1}{2(\alpha-1)} \left( (\alpha-1)(u+v) + 1 - \sqrt{((\alpha-1)(u+v) + 1)^2 - 4\alpha(\alpha-1)uv} \right). \quad (5)$$

Справді, розв'язуємо рівняння

$$\frac{2y(y-1)(u(\alpha^2-1)-\alpha+1)-\alpha-(2y-1)\sqrt{\alpha^2+4(\alpha^2-1)\alpha uy(1-u)(1-y)}}{2(y(y-1)^2(\alpha-1)^2-\alpha)} = v$$

відносно  $y$ . Матимемо

$$y(u, v) = \frac{1}{2} - \frac{(\alpha-1)(u+v) + 1 - 2\alpha v}{2\sqrt{((\alpha-1)(u+v) + 1)^2 - 4\alpha(\alpha-1)uv}}. \quad \text{Звідси отримаємо (5).}$$



Графік щільності копули Плакетта ( $\alpha=2$ )

**Примітка.** З копул можна отримувати так звані копули виживання (survival copulas [1, 1.6.1 p.32])  $\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v)$ , які будуть функціями розподілу сукупностей  $(1-\xi, 1-\eta)$ . Наприклад, для копули Гамбеля копула виживання така:  $\hat{C}_\theta(u, v) = uv \exp(-\theta \log u \log v)$ , а для копули Клайтона  $\hat{C}(u, v) = C(u, v)$ .

**Приклад 1.6.** Побудувати сукупність випадкових величин з копулою FGM(2)

$$C(x, y) = xy(1 + \frac{1}{2}(1 - x^2)(1 - y^2)).$$

Для цієї копули щільність  $c(x, y) = 1 + \frac{1}{2}(1 - 3x^2)(1 - 3y^2)$ ,

$$F_{\eta|\xi=x} = \int_0^y c(x, t) dt = \frac{1}{2}((3x^2 - 1)y^3 + 3y(1 - x^2)).$$

З кубічного рівняння  $(3x^2 - 1)y^3 + 3y(1 - x^2) - 2z = 0$  (відносно  $y = y(x, z)$ ) знаходимо

$$y = \begin{cases} z, & \text{якщо } x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \frac{1}{6\sqrt{2}(3x^2 - 1)} \left( (1 + i\sqrt{3})u(x, z) - \frac{2(1 - i\sqrt{3})v(x, z)}{u(x, z)} \right), & \text{якщо } x < \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \frac{1}{3\sqrt{2}(3x^2 - 1)} \left( \frac{\sqrt[3]{4}v(x, z)}{u(x, z)} - u(x, z) \right), & \text{якщо } x > \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

де

$$u(x, z) := 3 \left( 2(3x^2 - 1)^2 \left( -z + \sqrt{z^2 + \frac{(1 - x^2)^3}{3x^2 - 1}} \right) \right)^{1/3}, \quad v(x, z) := 9(1 - x^2)(3x^2 - 1).$$

Звідси отримуємо шукану сукупність  $(\xi, \eta = y(\xi, \zeta))$ , де випадкові величини  $\xi$  та  $\zeta$  рівномірно розподілені на проміжку  $[0, 1]$ .

**Приклад 1.7.** Побудувати сукупність випадкових величин з копулою FGM(3)

$$C(x, y) = xy(1 + \frac{1}{3}(1 - x^3)(1 - y^3)).$$

Для цієї копули щільність  $c(x, y) = 1 + \frac{1}{3}(1 - 4x^3)(1 - 4y^3)$ ,

$$F_{\eta|\xi=x} = \int_0^y c(x,t)dt = \frac{1}{3}((4x^3 - 1)y^4 + 4y(1 - x^3)).$$

З рівняння  $(4x^3 - 1)y^4 + 4y(1 - x^3) - 3z = 0$  (відносно  $y$ ) знаходимо

$$y = \begin{cases} \frac{v(x,z)}{\sqrt{2}} + \left( \frac{z}{2(u(x,z))^{1/3}} - \frac{(u(x,z))^{1/3}}{2(4x^3 - 1)} + \frac{(1 - x^3)\sqrt{2}}{(4x^3 - 1)v(x,z)} \right)^{1/2}, & \text{якщо } x \neq \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \\ z, & \text{якщо } x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \end{cases}$$

де

$$u(x,z) := -1 + 6x^3 - 9x^6 + 4x^9 + ((1 - 4x^3)^2((x^3 - 1)^4 + z^3(4x^3 - 1)))^{1/2},$$

$$v(x,z) = \left( \frac{z - 4zx^3 + (u(x,z))^{1/3}}{(4x^3 - 1)(u(x,z))^{1/3}} \right)^{1/2}.$$

Звідси отримуємо шукану сукупність  $(\xi, \eta = u(\xi, \zeta))$ , де випадкові величини  $\xi$  та  $\zeta$  рівномірно розподілені на проміжку  $[0,1]$ .

**Приклад 1.8.** Побудувати сукупність випадкових величин з копулою  $C(x,y) = xy(1 + (1-x)(1-y)(1+xy))$ . (Копула Фарлі-Гамбеля\_1).

Для цієї копули щільність

$$c(x,y) = 2 - 2x - 2y + 8xy - 6x^2y - 6xy^2 + 9x^2y^2,$$

$$F_{\eta|\xi=x} = \int_0^y c(x,t)dt = y^3(3x^2 - 2x) - y^2(3x^2 - 4x + 1) + 2y(1 - x)$$

З кубічного рівняння (відносно  $y$ )

$$y^3(3x^2 - 2x) - y^2(3x^2 - 4x + 1) + 2y(1 - x) - z = 0$$

знаходимо

$$y = y(x,z) = \begin{cases} \sqrt{1+3z} - 1, & \text{якщо } x = \frac{2}{3}, \\ u(x,z) + v(x,z) - s(x), & \text{якщо } d(x,y) \geq 0, \\ 2\left(-\frac{1}{3}p(x)\right)^{1/2} \arccos\left(-\frac{1}{2}q(x,z)\left(-\frac{3}{p(x)}\right)^{1/2}\right) - s(x), & \text{якщо } d(x,y) < 0 \end{cases},$$



де

$$s(x) := \frac{3x^2 - 4x + 1}{3(2x - 3x^2)}, \quad p(x) := -\frac{9x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 4x + 1}{3x^2(3x - 2)^2},$$

$$q(x, z) := \frac{2(9x^3 + 12x^2 - 11x - 1)(3x - 1)(x - 1)^2}{27x^3(3x - 2)^3} + \frac{z}{x(3x - 2)},$$

$$d(x, z) := \left( \frac{p(x)}{27} \right)^3 + \left( \frac{1}{2} q(x, z) \right)^2,$$

$$u(x, z) := \left( -\frac{1}{2} q(x, z) + \sqrt{d(x, z)} \right), \quad v(x, z) := -\frac{p(x)}{3u(x, z)}.$$

Звідси отримуємо шукану сукупність  $(\xi, \eta = u(\xi, \varsigma))$ , де випадкові величини  $\xi$  та  $\varsigma$  рівномірно розподілені на проміжку  $[0, 1]$ .

## 2. Лінійна середня модульна регресія

**Означення 1.** Пряма  $y = ax + b$  називається прямою середньої модульної регресії  $\eta$  на  $\xi$ , якщо модульне відхилення  $\delta(a, b) := M|\eta - a\xi - b|$  приймає найменше значення.

Аналогічно дається означення прямою середньої модульної регресії  $\xi$  на  $\eta$ .

Для копул зі щільністю  $c(x, y)$

$$\begin{aligned} \delta(a, b) &= \int_0^1 \int_0^1 |y - ax - b| c(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{ax+b}^1 y c(x, y) dy - a \int_0^1 x dx \int_{ax+b}^1 c(x, y) dy - \\ & b \int_0^1 dx \int_{ax+b}^1 c(x, y) dy + a \int_0^1 x dx \int_0^{ax+b} c(x, y) dy + b \int_0^1 dx \int_0^{ax+b} c(x, y) dy - \int_0^1 dx \int_0^{ax+b} y c(x, y) dy = \\ & \int_0^1 dx \left( \int_0^1 y c(x, y) dy + \int_0^{ax+b} (2ax + 2b - 2y) c(x, y) dy - ax - b \right), \quad \text{а звідси} \end{aligned}$$

$$\delta(a, b) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2} - b + \int_0^1 dx \int_0^{ax+b} (2ax + 2b - 2y) c(x, y) dy.$$

Для знаходження коефіцієнтів  $a$  та  $b$  потрібно розв'язати систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \delta}{\partial b} = 0 \end{array} \right., \text{ яка для копул буде такою: } \left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 x dx \int_0^{ax+b} c(x, y) dy = \frac{1}{4}, \\ \int_0^1 dx \int_0^{ax+b} c(x, y) dy = \frac{1}{2}. \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\text{Тоді } \delta(a, b) = \frac{1}{2} - 2 \int_0^1 dx \int_0^{ax+b} y c(x, y) dy.$$

**Означення 2.** Для сукупності  $(\xi, \eta)$  пряма  $y=ax+b$  називається медіанною, якщо

$$P((\xi, \eta) | \eta \leq a\xi + b) \geq \frac{1}{2}, \quad P((\xi, \eta) | \eta \geq a\xi + b) \geq \frac{1}{2}.$$

Через те, що  $\int_0^1 dx \int_0^{ax+b} c(x, y) dy = P((\xi, \eta) | \eta \leq a\xi + b)$ , то з (6) випливає,

що

пряма середньої модульної регресії буде і медіанною прямою.

**Приклад 2.1.** Знайти пряму середньої модульної регресії й модульне відхилення для копули Моргенштерна

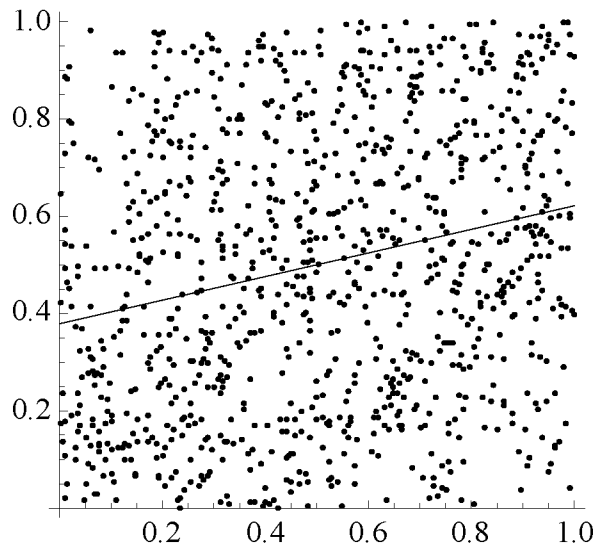
$$c(x, y) = \frac{\partial^2 C(x, y)}{\partial x \partial y} = 1 + \alpha(2x - 1)(2y - 1)$$

$$\delta(a, b) = \frac{1}{30} (3a^3\alpha + 5a^2(2b\alpha - \alpha + 2) + 5a(2b^2\alpha + 2b(3 - \alpha) - 3) + 30b^2 - 30b + 15)$$

Далі потрібно розв'язати систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{30} (9a^2\alpha + 10a(2b\alpha - \alpha + 2) + 5(2b^2\alpha + 2b(3 - \alpha) - 3) - 3) = 0, \\ \frac{1}{3} (a^2\alpha + a(2b\alpha - \alpha + 3) + 6b - 3) = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Звідси } a = \frac{-5 + \sqrt{25 + 15\alpha^2}}{3\alpha}, \quad b = \frac{5 + 3\alpha - \sqrt{25 + 15\alpha^2}}{6\alpha}.$$



Діаграма розсіювання й медіанна пряма для копули Моргенштерна  
( $\alpha=1$ )

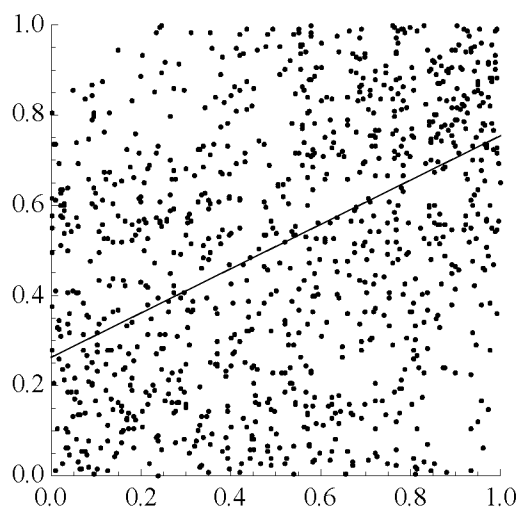
**Приклад 2.2.** Знайти пряму середньої модульної регресії й модульне відхилення для копули FGM(2)  $c(x, y) = 1 + \frac{1}{2}(1 - 3x^2)(1 - 3y^2)$ ,

$$\delta(a, b) = \frac{1}{140}(8a^4 + 35a^2b + 28a^2(2b^2 + 1) + 35ab(b^2 + 3) + 140b^2) + \frac{1-a}{2} - b.$$

Далі потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} 32a^3 + 105a^2b + 56a(2b^2 + 1) + 35(b^3 + 3b - 2) = 0, \\ 5a^3 + 16a^2b + 15a(2b^2 + 1) + 40b - 20 = 0. \end{cases}$$

Звідси  $a=0.491189\dots$ ,  $b=0.26289\dots$ ,  $\delta=0.225742\dots$



Діаграма розсіювання й медіанна пряма для копули FGM(2)

**Приклад 2.3.** Знайти пряму середньої модульної регресії й модульне

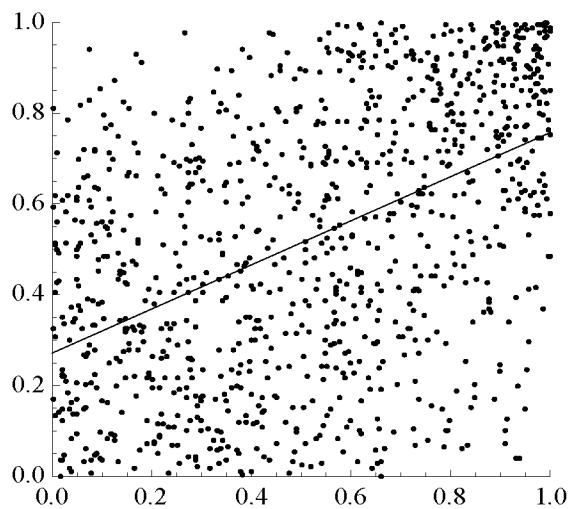
відхилення для копули FGM(3)  $c(x, y) = 1 + \frac{1}{3}(1 - 4x^3)(1 - 4y^3)$

$$\delta(a, b) = \frac{1}{2} + \frac{a^5}{27} - b + b^2 + \frac{a^4 b}{5} + \frac{3a^3 b^2}{7} + \frac{2}{9}a^2(1 + b^3) + \frac{1}{10}a(2b^4 + 8b - 5).$$

Далі потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} \frac{5a^4}{27} + \frac{4a^3 b}{5} + \frac{9a^2 b^2}{7} + \frac{4}{9}a(1 + b^3) + \frac{1}{10}(2b^4 + 8b - 5) = 0, \\ -1 + 2b + \frac{a^4}{5} + \frac{6a^3 b}{7} + \frac{4}{3}a^2 b^2 + \frac{8}{10}a(1 + b^3) = 0. \end{cases}$$

Звідси  $a=0.484827\dots$ ,  $b=0.271799\dots$ ,  $\delta=0.227548\dots$ .



Діаграма розсіювання й медіанна пряма для копули FGM(3)

**Приклад 2.4.** Знайти пряму середньої модульної регресії й модульне

відхилення для копули Фарлі-Гамбеля\_1.

$$C(x, y) = xy(1 + (1 - x)(1 - y)(1 + xy)),$$

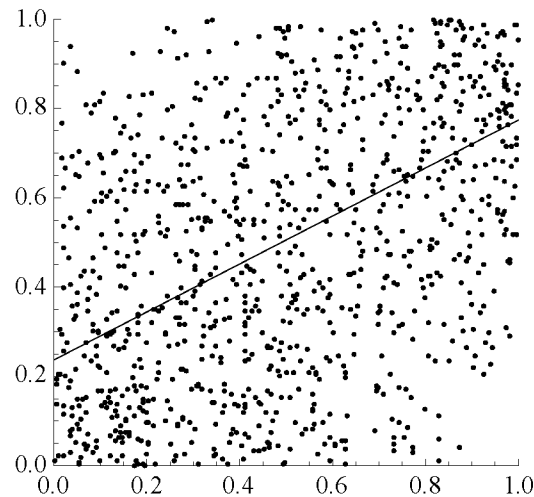
$$c(x, y) = 2 - 2x - 2y + 8xy - 6x^2 y - 6xy^2 + 9x^2 y^2,$$

$$\delta(a, b) = \frac{1}{210}(10a^4 + 7a^3(6b + 1) + 7a^2(9b^2 + 4b + 5) + 35a(b^3 + b^2 + 4b - 3) + 210b^2 - 210b + 105).$$

Далі потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} 40a^3 + 21a^2(6b + 1) + 14a(9b^2 + 4b + 5) + 35(b^3 + b^2 + 4b - 3) = 0, \\ 6a^3 + 2a^2(9b + 2) + 5a(3b^2 + 2b + 4) + 30(2b - 1) = 0. \end{cases}$$

Звідси  $a=0.537047\dots$ ,  $b=0.2370066\dots$ ,  $\delta=0.360855\dots$ .



Діаграма розсіювання й медіанна пряма для копули Фарлі-Гамбеля\_1

**Приклад 2.5.** Знайти пряму середньої модульної регресії й модульне відхилення для копули Фарлі-Гамбеля\_2.

$$C(x, y) = xy(1 + \frac{1}{2}(1 - x^2)(1 - y^2)(1 + xy)),$$

$$c(x, y) = \frac{1}{2}(3 - 3x^2 + 4xy - 8x^3y - 3y^2 + 9x^2y^2 - 8xy^3 + 16x^3y^3),$$

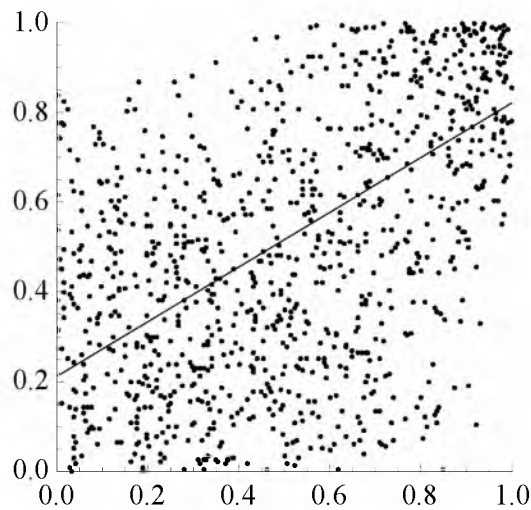
$$\delta(a, b) = \frac{1}{2} + \frac{2}{63}a^5 + a^4\left(\frac{2}{35} + \frac{1}{6}b\right) - b - b^2 + \frac{1}{140}a^3(48b^2 + 35b - 8) +$$

$$\frac{1}{30}a^2(6 - 5b + 12b^2 + 10b^3) + \frac{1}{60}a(8b^4 + 15b^3 - 8b^2 + b - 30).$$

Далі потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} \frac{10}{63}a^4 + a^3\left(\frac{8}{35} + \frac{2}{3}\right)b + \frac{3}{140}a^2(48b^2 + 35b - 8) + \frac{1}{15}a(10b^3 + 12b^2 - 5b + 6) + \\ \frac{1}{60}(8b^4 + 15b^3 - 8b^2 + b - 30) = 0, \\ -1 + \frac{1}{6}a^4 + a^3\left(\frac{1}{4} + \frac{24}{35}b\right) + 2b + a^2\left(\frac{4}{5}b + b^2 - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{60}a(45 - 16b + 45b^2 + 32b^3). \end{cases}$$

Звідси  $a=0.609218\dots$ ,  $b=0.211914\dots$ ,  $\delta=0.210082\dots$ .



Діаграма розсіювання й медіанна пряма для копули Фарлі-Гамбеля\_2

**Примітка.** Розглянуті системи мають по декілька розв'язків. Серед них ми вибираємо дійсний і такий, для якого модульне відхилення найменше.

### 3. Початкові моменти копул

Для ряду копул можна знайти початкові моменти всіх порядків у замкненому вигляді. Початкові моменти  $a_{mn}$  порядку  $m+n$  знаходяться за формулами  $a_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 x^m y^n c(x,y) dx dy$ , а коефіцієнт кореляції  $\rho = 12a_{11} - 3$ .

Приведемо декілька прикладів.

**Приклад 3.1.** Для копули Моргенштерна зі щільністю

$$c(x,y) = 1 + a(1-2x)(1-2y), \quad -1 \leq a \leq 1,$$

$$a_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \cdot \left( 1 + \frac{amn}{m+2(n+2)} \right).$$

Коефіцієнт кореляції  $\rho = 3a/7$ .

**Приклад 3.2.** Для копули FGM зі щільністю

$$c(x,y) = 1 + \alpha((1+p)x^p - 1)((1+p)y^p - 1), \quad -1 < \alpha \leq \frac{1}{p},$$

$$a_{mn} = \frac{(1+p)(1+n+p) + m(1+n+p + \alpha np^2)}{(m+1)(n+1)(1+m+p)(1+n+p)}.$$

Коефіцієнт кореляції  $\rho = \frac{3\alpha p^2}{(p+2)^2}$ .

**Приклад 3.3.** Для копули Фарлі-Гамбеля\_1 зі щільністю

$$c(x, y) = 2 - 2x - 2y + 8xy - 6x^2y - 6xy^2 + 9x^2y^2$$

$$a_{mn} = \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} \cdot \left( \frac{2(m+3)}{n+1} + \frac{4m}{n+2} + \frac{3m(m+1)}{n+3} \right).$$

Коефіцієнт кореляції  $\rho = 5/12$ .

**Приклад 3.4.** Для копули зі щільністю

$$c(x, y) = 1 + a(1-x)(1-y)(1-3x)(1-3y), \quad -0.5 \leq a \leq 0.5,$$

$$a_{mn} = \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} \cdot \left( \frac{6+m(5-2a+m)}{n+1} + \frac{8am}{n+2} + \frac{6am}{n+3} \right).$$

Коефіцієнт кореляції  $\rho = 19a/12$ .

## ПОСИЛАННЯ

[1] Johnson, M.E., Chiang Wang and John S. (1984). Generation of continuous multivariate distributions for statistical applications. *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **4**, 225-248.

[2] Nelsen R.B. (2006). *An introduction to copulas*. Springer, New York.